

ΚΩΣΤΑΣ ΖΑΧΑΡΟΣ

Οι μαθηματικές έννοιες
στην Προσχολική Εκπαίδευση
και η διδασκαλία τους



ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ 

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα μαθηματικά στην Προσχολική Εκπαίδευση xiii

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ: ΘΕΩΡΗΤΙΚΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΣΤΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ

1. ΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΑΚΤΙΚΕΣ	5
1.1 Γενικά για τη μάθηση	5
1.2 Οι θεωρίες μάθησης και η επίδρασή τους στις διδακτικές πρακτικές	6
1.3 Σύγχρονες θεωρίες μάθησης:	
Η συγκρότηση των διδακτικών «παραδειγμάτων»	8
1.3.1 Οι εμπειριστικές θεωρίες μάθησης	9
1.3.2 Οι γνωστικές θεωρίες του ολικού-μορφικού πεδίου	17
1.3.3 Ο Piaget και οι επιστημολογικές του απόψεις	28
1.3.4 Πέρα από τον Piaget: Νεότερες έρευνες	34
1.3.5 Ο ρόλος των κοινωνικών μεταβλητών στην ανάπτυξη της νοημοσύνης	39
1.3.6 Ένα παράδειγμα: Οι διαφορετικές θεωρητικές προσεγγίσεις στην περίπτωση της έννοιας του μήκους	44
1.3.7 Ερευνητικές και διδακτικές προσεγγίσεις που προσμετρούν το ρόλο των κοινωνικών παραμέτρων	52
1.3.8 Η μοντελοποίηση ως εκπαιδευτική πρακτική στα Μαθηματικά	74
1.3.9 Μια απόπειρα σύνθεσης	78

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ: ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΤΗΝ ΠΡΟΣΧΟΛΙΚΗ ΗΛΙΚΙΑ

2. Ο ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ	87
Η οικοδόμηση του χώρου στο παιδί	87
3. ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ	91
3.1 Εισαγωγικοί ορισμοί: Η έννοια της γεωμετρικής δομής	91
3.2 Τοπολογικές δομές	95
3.3 Ψυχολογικές και διδακτικές διαστάσεις	99
3.3.1 Ιδέες για περαιτέρω ανάπτυξη	100

4.	ΠΡΟΒΟΛΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ	105
4.1	Εισαγωγικά περί προοπτικής	105
4.2	Βασικά στοιχεία της προοπτικής	106
4.3	Η ανάπτυξη της προβολικής γεωμετρίας	107
4.4	Ψυχολογικές και διδακτικές διαστάσεις	109
4.4.1	Ιδέες για περαιτέρω ανάπτυξη	111
5.	ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ: Ο ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΟΣ ΧΩΡΟΣ	121
5.1	Η ανάπτυξη της οπτικής αντιληπτικής ικανότητας	121
5.2	Η γεωμετρία ως επιστήμη μελέτης του χώρου: Ψυχολογικές και διδακτικές πλευρές της κατανόησής της	122
5.3	Επίπεδα κατανόησης της γεωμετρίας σύμφωνα με το μοντέλο των van Hiele	123
5.3.1	Προϋποθέσεις για την ανάπτυξη του μοντέλου των van Hiele	126
5.3.2	Επίπεδα διδασκαλίας στο μοντέλο των van Hiele	127
5.4	Η κοινωνικοπολιτισμική προσέγγιση στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών	130
5.5	Η κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων στη μαθηματική εκπαίδευση	132
5.6	Εισαγωγή στη διδασκαλία των γεωμετρικών σχημάτων	134
5.6.1	Διάκριση τετραγώνου και ορθογώνιου	137
5.6.2	Τρόποι παρουσίασης των σχημάτων	139
5.6.3	Η σημασία της γλώσσας	139
5.6.4	Περνώντας στη διδασκαλία: Ιδέες για περαιτέρω ανάπτυξη	140
6.	ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ	149
6.1	Είδη συμμετρίας και μετασχηματισμοί	150
6.2	Ιδέες για περαιτέρω ανάπτυξη	154
7.	ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ	157
7.1	Ψυχολογικές και διδακτικές προσεγγίσεις	157
7.2	Η μέτρηση γεωμετρικών μεγεθών στο θεωρητικό πλαίσιο του Piaget	158
7.3	Το θεωρητικό πλαίσιο για τη διδακτική προσέγγιση της μέτρησης	159
7.3.1	Μορφές μέτρησης	160
7.4	Γραμμική μέτρηση: Η μέτρηση του μήκους	163
7.4.1	Διδακτικές προτάσεις για τη μέτρηση του μήκους: Ένα παράδειγμα	166
7.4.2	Ιδέες για περαιτέρω ανάπτυξη	172

7.5	Συγκρίσεις επιφανειών: Απόπειρες μέτρησης	175
7.5.1	Διδακτικές προσεγγίσεις της μέτρησης επιφανειών: Η χρήση της ιστορικής προοπτικής και της κοινωνικής σημασιοδότησης	180
7.5.2	Ικανότητες για την επιτυχή μέτρηση του εμβαδού	184
7.5.3	Προτάσεις για μια διδακτική παρέμβαση στη μέτρηση του εμβαδού	185
7.5.4	Ιδέες για περαιτέρω ανάπτυξη	185
7.6	Όγκος: Έννοια και διδακτικές προσεγγίσεις	187
7.6.1	Όγκος και χωρητικότητα: Δύο έννοιες διακριτές	188
7.6.2	Διδακτικές προτάσεις για τη μέτρηση της χωρητικότητας: Ένα παράδειγμα	190
7.6.3	Οικοδόμηση ενός μέτρου μέτρησης της χωρητικότητας	195
7.7	Η έννοια της γωνίας	198
8.	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ	201
8.1	Ταξινόμηση και διάταξη	201
8.2	Ένα παράδειγμα ταξινόμησης, χρονικής διάταξης και αριθμητικών εννοιών	203
8.3	Ιδέες για περαιτέρω ανάπτυξη	206
8.4	Περιοδικότητα	207
8.5	Αντιστοιχίσεις	210
8.5.1	Διμελείς σχέσεις	210
8.5.2	Απεικόνιση και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση	213
8.6	Περνώντας στη διδασκαλία	215
9.	Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΜΟΙΡΑΣΙΑΣ	217
9.1	Η έννοια της μοιρασιάς: Μια πρωτοαριθμητική έννοια	217
9.2	Εισαγωγή στην κλασματική μονάδα	222
10.	Ο ΑΡΙΘΜΟΣ	225
10.1	Ο αριθμός ως πολιτισμικό δημιούργημα	225
10.2	Η θεωρία του Pιaget για τον αριθμό	227
10.3	Η έννοια της διατήρησης του αριθμού: Πειραματική διερεύνηση	227
10.4	Ο αριθμός ως σύνθεση δύο σχέσεων: της διάταξης και του ιεραρχικού εγκλεισμού	229
10.5	Η διδασκαλία του αριθμού	232
10.5.1	Σημεία και σύμβολα	232

10.5.2	Προτάσεις για τη διδασκαλία	233
10.5.3	Ιδέες για περαιτέρω ανάπτυξη	235
11.	ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΤΕΣΣΕΡΙΣ ΠΡΑΞΕΙΣ	239
11.1	Πρόσθεση και αφαίρεση	239
11.1.1	Ψυχολογικές διαστάσεις στη συγκρότηση των γνωστικών σχημάτων της πρόσθεσης και της αφαίρεσης	239
11.1.2	Τυπολογίες προβλημάτων πρόσθεσης και αφαίρεσης	241
11.1.3	Στρατηγικές των παιδιών σε προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης: Στοιχεία από μια έρευνα	247
11.1.4	Προτάσεις για τη διδασκαλία	254
11.1.5	Ιδέες για περαιτέρω ανάπτυξη	257
11.2	Πολλαπλασιασμός και διαίρεση	268
11.2.1	Τυπολογίες σε προβλήματα πολλαπλασιασμού	269
11.2.2	Τυπολογίες σε προβλήματα διαίρεσης	271
11.3	Οι αριθμητικές πράξεις από την οπτική της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης	274
11.3.1	Το θεωρητικό πλαίσιο της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης	274
11.3.2	Η διδακτική προοπτική στη ρεαλιστική μαθηματική εκπαίδευση	278
12.	ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ	279
12.1	Ο ρόλος των σημείων και συμβόλων στην οικοδόμηση της μαθηματικής γνώσης	279
12.1.1	Αναπαράσταση ποσοτήτων από παιδιά Προσχολικής Εκπαίδευσης: Στοιχεία από μια έρευνα	283
12.1.2	Η οικειοποίηση του μαθηματικού συμβολισμού	286
12.1.3	Ο μαθηματικός συμβολισμός στα «ρεαλιστικά μαθηματικά»	289
12.1.4	Μορφές γραφικής αναπαράστασης στην Προσχολική Εκπαίδευση	290
12.2	Η διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών στην περίπτωση μειονοτικών και εθνοτικών ομάδων: Το παράδειγμα των Τσιγγάνων	295
12.2.1	Κοινωνιολογικές θεωρήσεις της σχολικής αποτυχίας	295
12.2.2	Ένα παράδειγμα: Η πρόσβαση των Τσιγγάνων στους εκπαιδευτικούς θεσμούς	297
12.2.3	Μεθοδολογικές επισημάνσεις: Μειονοτικές ομάδες και εκπαιδευτική έρευνα	304
	ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	309

2

Ο ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ

Η ΟΙΚΟΔΟΜΗΣΗ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ ΣΤΟ ΠΑΙΔΙ

Ο ΧΩΡΟΣ ΑΝΤΙΜΕΤΩΠΙΖΕΤΑΙ ΣΥΝΗΘΩΣ σαν κάτι το δοσμένο και αντικειμενικό, που προηγείται της ανθρώπινης εμπειρίας και που ο άνθρωπος οφείλει να το αναγνωρίσει και να το οικειοποιηθεί. Η αντίληψη αυτή εκφράστηκε με ενάργεια στην προσπάθεια των ζωγράφων της Αναγέννησης να υποτάξουν το χώρο στους κανόνες των ευκλείδειων διαστάσεων. Όμως, η συνεισφορά της ψυχολογίας στον τομέα της αντίληψης του χώρου και της οικειοποίησής του από το παιδί θα τονίσει την ιστορικότητα και συνεπώς τη σχετικότητα της προσπάθειας να υποταχθεί ο χώρος σε μια γραμμική προοπτική. Οι ίδιοι οι αντιληπτικοί μηχανισμοί θα πάψουν να θεωρούνται ως μια διαδικασία παθητικής πρόσληψης και θα υπογραμμιστεί η ενεργός «δράση» του υποκειμένου. Η Φλοράνς ντε Μερεντιέ (1981, σ. 65) θα τονίσει «ότι δεν υπάρχει χώρος καθεαυτός, αλλά μια πολλαπλότητα δυνατών χώρων, και ότι η εμφάνιση του καθενός απ' αυτούς εξαρτάται από τις κοινωνικοϊστορικές συνθήκες της εποχής». Επιπλέον, ο αρχικός χώρος που κατασκευάζει το παιδί δεν σχετίζεται με τους χώρους που συναντάμε στη θεσμοθετημένη εκπαίδευση ή την επιστήμη, αλλά έχει να κάνει με τα ψυχολογικά χαρακτηριστικά της ανάπτυξής του.

Το παιδί στα αρχικά στάδια της ανάπτυξής του δεν έχει μία αντίληψη του χώρου ανάλογη με τη δική μας. Πριν φτάσει στο σημείο της αναπαράστασης του χώρου μέσω της γραφής, προηγείται η οικοδόμηση άλλων χώρων, που έχουν εμβρυώδη και παθητικά χαρακτηριστικά και σχετίζονται με τα συναισθήματα της αναμονής και της επιθυμίας. Σε ένα επόμενο στάδιο

θα αναπτυχθεί ο αισθησιοκινητικός χώρος που σχετίζεται με την προσπάθεια κίνησης και προσανατολισμού. Συνεπώς, η οικοδόμηση του αναπαραστατικού χώρου, που θα οδηγήσει και στη γραφική αναπαράσταση, έννοιες με τις οποίες ασχολείται ιδιαίτερα ο κλάδος της Γεωμετρίας, θα βασιστεί σε προϋπάρχοντες χώρους που είναι ζωτικοί για την ύπαρξη και την ανάπτυξη του παιδιού.

Η προσπάθεια αναπαράστασης του χώρου, δηλαδή ο λεγόμενος αναπαραστατικός χώρος, θα βασιστεί στον αντιληπτικό χώρο του παιδιού και θα τον ακολουθήσει χρονικά. Στα πρώτα στάδια του παιδικού σχεδίου συμμετέχουν πολλοί χώροι που έχουν να κάνουν με αισθησιοκινητικά χαρακτηριστικά. Επιπλέον, οι πρώτες προσπάθειες αναπαράστασης του χώρου δεν θα αποτελέσουν μια άμεση μεταφορά του αντιληπτικού χώρου. Στοιχεία συναισθηματικά και βιωματικά θα παίξουν κυρίαρχο ρόλο στους τρόπους αναπαράστασης. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι τα παιδιά αρχικά δεν ενδιαφέρονται για τη διατήρηση των μετρικών ή αναλογικών σχέσεων και συχνά στις απόπειρες γραφικής αναπαράστασης προβάλλουν «συναισθηματικά μεγέθη» (ντε Μερεντιέ, 1981), όπως, για παράδειγμα, στην περίπτωση του Σχήματος 2.1.



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα σχεδίου όπου κυριαρχούν τα συναισθηματικά μεγέθη (Αθηνά, 4 ετών)

Το παιδί αρχίζει να οικοδομεί ένα χώρο σαφή και συνεκτικό στο βαθμό που αρχίζει, σύμφωνα με την πιαζετιανή προβληματική, να οικοδομείται η διατήρηση του αντικειμένου. Μέχρι τότε «χώρος και αντικείμενα, περιέχον και περιεχόμενα, είναι ακόμη αδιαφοροποίητα» (ντε Μερεντιέ, 1981). Σύμφωνα με τον Piaget (1956) υπάρχουν τρία στάδια στην εξέλιξη της αναπαράστασης του χώρου: Στο πρώτο στάδιο, που χαρακτηρίζεται ως *συνθετική ανικανότητα*, αγνοούνται τα ευκλείδεια και προβολικά¹ χαρακτηριστικά. Εδώ δεν διατηρούνται οι αναλογίες μεταξύ των μεγεθών, τα ίδια μεγέθη δεν διατηρούν τη σταθερότητά τους και, επιπλέον, δεν εμφανίζονται στοιχεία γεωμετρικής προοπτικής. Είναι το στάδιο όπου αρχίζουν να οικοδομούνται τα τοπολογικά² χαρακτηριστικά στην απεικόνιση του χώρου, όπως, για παράδειγμα, οι σχέσεις εγκλεισμού στην απεικόνιση των χαρακτηριστικών του προσώπου. Όμως, από την άλλη, οι σχέσεις εγκλεισμού δεν τηρούνται με συνέπεια. Έτσι, μπορεί, για παράδειγμα, τα μάτια να σχεδιαστούν έξω από το πρόσωπο κ.λπ. Το στάδιο αυτό χρονικά διαρκεί μέχρι το τρίτο ή το τέταρτο έτος. Το δεύτερο στάδιο χαρακτηρίζεται ως στάδιο του *διανοητικού ρεαλισμού* και καλύπτει χρονικά την περίοδο από 4 μέχρι 10 ετών. Είναι το στάδιο όπου κατά κανόνα τηρούνται τα τοπολογικά χαρακτηριστικά του χώρου και αρχίζουν να οικοδομούνται οι προβολικές σχέσεις. Τέλος, στην ηλικία των 8 και 9 ετών αρχίζει να οικοδομείται ο *οπτικός ρεαλισμός*, όπου παράλληλα με την ύπαρξη των τοπολογικών και προβολικών χαρακτηριστικών στις απεικονίσεις γίνεται μια προσπάθεια για την τήρηση των αναλογικών σχέσεων των μεγεθών.

Κλείνοντας την εισαγωγική μας αναφορά στη διαδικασία οικοδόμησης του παιδικού χώρου, κρίνουμε σκόπιμο να μεταφέρουμε τον προβληματισμό που έχει αναπτυχθεί σχετικά με το αν η προοπτική αποτελεί ένα αναπόφευκτο στάδιο στην εξέλιξη του παιδικού σχεδίου. Αν δηλαδή η προοπτική απο-

1. Για τα προβολικά χαρακτηριστικά θα μιλήσουμε αναλυτικότερα στο τέταρτο κεφάλαιο.

2. Για τις τοπολογικές σχέσεις θα μιλήσουμε στο επόμενο (τρίτο) κεφάλαιο.

τελεί μια «φυσική» συνέπεια στον τρόπο αντίληψης του χώρου και συνεπώς στην εξέλιξη του παιδικού σχεδίου. Στο σημείο αυτό θα υπογραμμιστεί η επίδραση του πολιτισμικού περιβάλλοντος των δυτικών κοινωνιών, η οποία ασκεί σημαντική επίδραση στον τρόπο θέασης και αναπαράστασης του χώρου. Έτσι, εκφράζονται σοβαρές αμφιβολίες για το αν τα παιδιά που μεγαλώνουν σε πολιτισμικά περιβάλλοντα ελεύθερα από δυτικές επιρροές θα καταλήξουν σε προοπτικές αναπαραστάσεις. Επιπλέον, η ντε Μερεντιέ σημειώνει ότι η προοπτική αναπαράσταση ευνοείται από ορισμένες τεχνικές σχεδίασης: «Όταν το παιδί χρωματίζει κατευθείαν, χωρίς προηγουμένως να έχει χαράξει το σχέδιο, η κηλίδα κυριαρχεί σε σχέση με τη γραμμή, με αποτέλεσμα να ευνοούνται οι τοπολογικές σχέσεις σε βάρος των προβολικών και ευκλείδειων σχέσεων» (1981, σ. 90).

Κάθε απόπειρα συγκρότησης ενός προγράμματος διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών στην προσχολική ηλικία οφείλει να δίνει απαντήσεις σε ερωτήματα όπως: Γιατί χρειαζόμαστε τα μαθηματικά σε μια τόσο πρόωγη βαθμίδα εκπαίδευσης; Μπορούν πράγματι τα μικρά παιδιά να «κάνουν» μαθηματικά; Τι είδους μαθηματικά είναι κατάλληλα γι' αυτή την εκπαιδευτική βαθμίδα; Τέλος, τι μπορεί να ενισχύσει το ενδιαφέρον τους για τη μάθηση των μαθηματικών; Στα ερωτήματα αυτά επιχειρείται να δοθεί απάντηση με την παρούσα έκδοση.

Η σύγχρονη έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών τονίζει ότι πολλές από τις μαθηματικές έννοιες συγκροτούνται και αναπτύσσονται σε ηλικίες πριν από την πρώτη σχολική βαθμίδα. Τα παιδιά έχουν την ικανότητα, για παράδειγμα, να απαριθμούν μικρές ποσότητες αντικειμένων, να διακρίνουν τα βασικά γεωμετρικά σχήματα, να ταξινομούν αντικείμενα ως προς ένα ή δύο χαρακτηριστικά τους, να προσθέτουν και να αφαιρούν μικρές ποσότητες αντικειμένων. Χρησιμοποιούν μαθηματικές ιδέες στις καθημερινές τους δραστηριότητες και συχνά αναπτύσσουν άτυπες μορφές σύνθετης μαθηματικής γνώσης. Αυτές τις μορφές γνώσης οφείλει να αναδείξει η μαθηματική εκπαίδευση, να συστηματοποιήσει και να τους προσδώσει ένα σαφές μαθηματικό περιεχόμενο.

Ο **Κώστας Ζαχάρος** είναι Λέκτορας στο Τμήμα Επιστημών της Εκπαίδευσης και της Αγωγής στην Προσχολική Ηλικία, στο Πανεπιστήμιο Πατρών. Τα διδακτικά και ερευνητικά του ενδιαφέροντα σχετίζονται με τη μαθηματική εκπαίδευση.

ISBN 978-960-455-128-6



9 789604 551286

ΒΟΗΘ. ΚΩΔ. ΜΗΧ/ΣΗΣ 4128