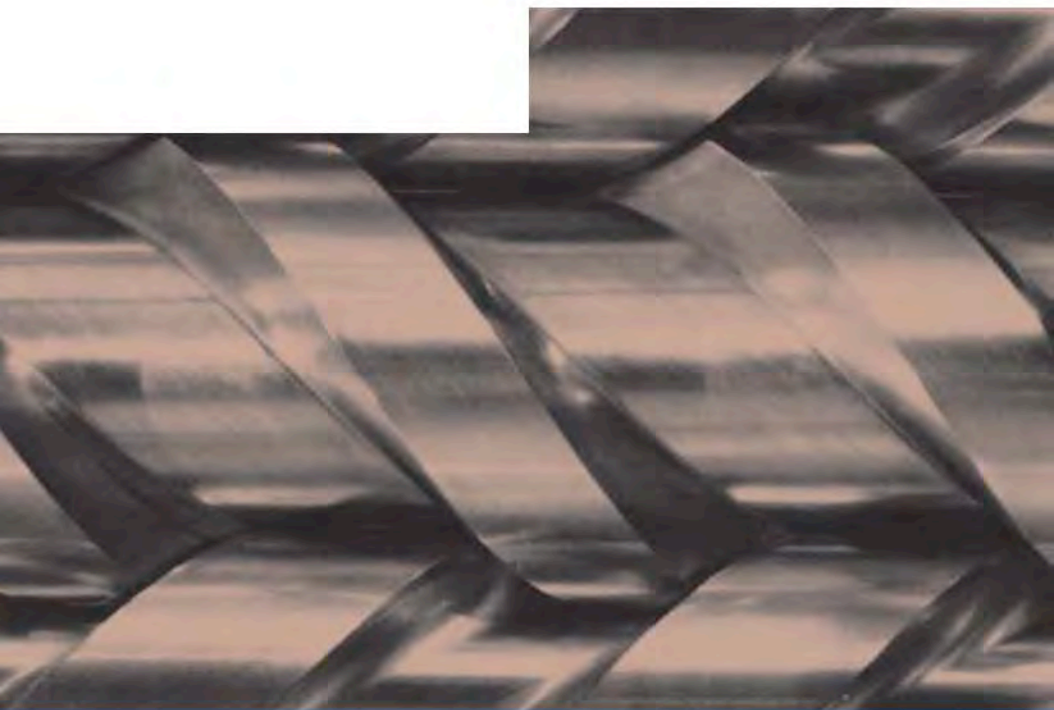


ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΧΑΣΑΠΗΣ

# Διδακτική βασικών μαθηματικών εννοιών

Αριθμοί και αριθμητικές πράξεις



ΜΕΤΑΙΧΜΙΟ 

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ	11
<b>1. ΤΑ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΟ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟ</b>	
ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ	13
1.1 Μια Αναγκαία Εισαγωγή: Οι Έννοιες και το Περιεχόμενο τους	15
1.2 Τα Θεμελιώδη Χαρακτηριστικά των Μαθηματικών Εννοιών	18
1.3 Η Οργάνωση των Μαθηματικών Εννοιών	21
1.4 Παρένθεση: Ένα Παράδειγμα Αξιωματικού Συστήματος Οργάνωσης Εννοιών	24
1.5 Παρένθεση: Ένα Ιστορικό Υπόδειγμα Αξιωματικού Συστήματος Οργάνωσης Μαθηματικών Εννοιών – <i>Ευκλείδου Στοιχεία</i>	26
1.6 Οι Συμβολικές Εκφράσεις των Μαθηματικών Εννοιών	29
1.7 Η Μαθηματική Γνώση	36
1.8 Οι Μαθηματικές Έννοιες και η Αντιστοιχισή τους σε Καταστάσεις της Πραγματικότητας	38
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ	44
<b>2. ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΛΟΓΙΚΟ-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ</b>	45
2.1 Η Έννοια του Συνόλου	47
2.2 Διμελείς Σχέσεις	49
2.3 Σχέσεις Ισοδυναμίας	53
2.4 Σχέσεις Εγκλεισμού ή Συμπερίληψης	55
2.5 Σχέσεις Διάταξης	57
2.6 Σχέσεις Αντιστοιχισής, Μετασχηματισμού ή Συνάρτησης	57

2.7	Πλήθος, Ποσότητα και Μέγεθος	58
2.8	Η Συγκρότηση και Ανάπτυξη των Θεμελιωδών Λογικο-Μαθηματικών Εννοιών και Σχέσεων	60
	ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ	66
<b>3.</b>	<b>ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ ΚΑΙ ΟΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΣΕ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ</b>	67
3.1	Οι Μαθηματικές Έννοιες του Αριθμού	69
3.1.1	Παρένθεση: Η Ιστορική Διαμόρφωση των Εννοιών του Αριθμού	80
3.2	Συστήματα Συμβολικών Παραστάσεων και Γλωσσικές Εκφράσεις των Αριθμών	86
3.2.1	Συστήματα Συμβολικών Παραστάσεων των Αριθμών	86
3.2.2	Το Δεκαδικό Σύστημα Αρίθμησης	88
3.2.3	Παρένθεση: Η Ιστορική Εξέλιξη των Αριθμητικών Συστημάτων	91
3.2.4	Οι Γλωσσικές Εκφράσεις των Αριθμών	96
3.3	Η Αντιστοίχιση των Αριθμών σε Καταστάσεις της Πραγματικότητας	99
3.3.1	Απαγγελία Αριθμών	99
3.3.2	Απαρίθμηση Διακριτών Αντικειμένων	100
3.3.3	Προσδιορισμός και Αριθμητική Έκφραση ενός Καθορισμένου Πλήθους Στοιχείων (Πληθικός Αριθμός)	104
3.3.4	Μέτρηση Συνεχών Μεγεθών	107
3.3.5	Παρένθεση: Το Μετρικό Σύστημα	110
3.3.6	Διάταξη των Στοιχείων ενός Συνόλου (Διατακτικός Αριθμός)	112
3.3.7	Κωδικοποίηση Στοιχείων (Κωδικός αριθμός)	114
3.4	Η Γενετική Προσέγγιση του Piaget και των Θεωριών της Γνωστικής Οικοδόμησης στη Συγκρότηση της Έννοιας του Αριθμού	114
3.5	Η Ιστορικο-κοινωνική Προσέγγιση του Vygotsky στη Συγκρότηση της Έννοιας του Αριθμού	119
	ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ	122

<b>4. ΟΙ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΠΡΑΞΕΩΝ ΚΑΙ</b>	
ΟΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΕΙΣ ΤΟΥΣ ΣΕ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	125
4.1 Το Νόημα των Μαθηματικών Πράξεων	127
4.2 Η Μαθηματική Έννοια των Αριθμητικών Πράξεων	129
4.3 Οι Αριθμητικές Πράξεις στο Δεκαδικό Σύστημα Αρίθμησης	132
4.4 Οι Έννοιες των Αριθμητικών Πράξεων και οι Αντιστοιχίσεις τους σε Καταστάσεις της Πραγματικότητας	134
4.4.1 Η Πράξη της Πρόσθεσης	134
4.4.2 Η Πράξη του Πολλαπλασιασμού	147
<b>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ</b>	<b>164</b>
<b>5. ΟΙ ΔΙΑΔΟΧΙΚΕΣ ΕΠΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ: ΑΚΕΡΑΙΟΣ, ΚΛΑΣΜΑ, ΡΗΤΟΣ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ</b>	<b>167</b>
5.1 Η Έννοια του Ακέραιου Αριθμού	169
5.2 Η Τροποποίηση της Έννοιας του Μηδενός	173
5.3 Η Αντιστοίχιση των Αρνητικών Ακέραιων Αριθμών σε Καταστάσεις της Πραγματικότητας	173
5.4 Οι Έννοιες του Κλάσματος και του Ρητού Αριθμού	175
5.5 Η Αντιστοίχιση Κλασμάτων και Ρητών Αριθμών σε Καταστάσεις της Πραγματικότητας	180
5.6 Οι Αριθμητικές Πράξεις στους Ρητούς Αριθμούς	189
5.7 Οι Δεκαδικοί Αριθμοί	191
5.8 Οι Έννοιες του Άρρητου και του Πραγματικού Αριθμού	193
<b>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ</b>	<b>194</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b>	<b>197</b>
I. Δύο Διαφορετικές Προσεγγίσεις στη Μαθηματική Θεμελίωση των Συνόλων και των Αντίστοιχων Εννοιών των Αριθμών	199
II. Μια Συνοπτική Έκθεση των Θεωρητικών Θέσεων του Piaget για τη Νοητική Ανάπτυξη και τη Γνωστική Συγκρότηση του Ατόμου	207
III. Μια Συνοπτική Έκθεση της Ιστορικο-Κοινωνικής Προσέγγισης του Vygotsky στη Νοητική Ανάπτυξη και στη Γνωστική Συγκρότηση του Ατόμου	225
<b>ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ</b>	<b>234</b>

## 1.2 ΤΑ ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

ΜΕ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΟΣΑ πολύ συνοπτικά και γενικά προαναφέρθηκαν για το περιεχόμενο και τις διαδικασίες συγκρότησης των εννοιών μπορεί να επισημανθούν τα βασικά χαρακτηριστικά των μαθηματικών εννοιών, τα οποία συγκροτούν την ιδιομορφία τους και παράλληλα αποτελούν πηγή προέλευσης νοητικών δυσκολιών για τη συγκρότησή τους από τα παιδιά και όχι μόνο.

Οι μαθηματικές έννοιες από τη βάση τους, δηλαδή οι πρωταρχικές μαθηματικές έννοιες και πολύ περισσότερο στην ανάπτυξή τους οι γενικότερες μαθηματικές έννοιες, δεν αντανακλούν και επομένως δεν αναφέρονται σε χαρακτηριστικά ή ιδιότητες που ενυπάρχουν στα στοιχεία της αισθητής πραγματικότητας και αποκαλύπτονται μέσα από την ανθρώπινη φυσική και νοητική δραστηριότητα. Δεν έχουν δηλαδή αισθητό αντίκρισμα. Οι μαθηματικές έννοιες αναφέρονται σε χαρακτηριστικά ή ιδιότητες, και κυρίως σε σχέσεις μεταξύ χαρακτηριστικών ή ιδιοτήτων, που δημιουργούνται ως νοητικές κατασκευές και εισάγονται από τον άνθρωπο στα στοιχεία της πραγματικότητας με στόχο τη νοητική της οργάνωση. Σχέσεις οι οποίες εισάγονται μέσα από μια προοδευτική διαδικασία αφαίρεσης και γενίκευσης ενεργειών που αναπτύσσονται επί των στοιχείων της πραγματικότητας και επί των μεταξύ τους σχέ-

σεων. Οι μαθηματικές έννοιες, δηλαδή, είναι προϊόντα ανθρώπινης επινόησης ή εφεύρεσης και όχι ανακάλυψης. Η μαθηματική έννοια «εμβαδόν», για παράδειγμα, δεν αντανακλά ένα υλικό χαρακτηριστικό που ενυπάρχει στις επιφάνειες από τη φύση τους και ανακαλύφθηκε από την ανθρώπινη δραστηριότητα, γι' αυτό και δεν έχει κανένα αισθητό αντίκρισμα. Μια επιφάνεια έχει χαρακτηριστικά που είναι ορατά, απτά, έχουν ενδεχομένως γεύση ή οσμή, αλλά το εμβαδόν της δεν έχει τίποτα από όλα αυτά, παρά μόνο ένα μέτρο που εκφράζει τη σχέση του μεγέθους της με ένα μοναδιαίο μέγεθος. Η μαθηματική έννοια «εμβαδόν» επινοήθηκε από τις ανάγκες των ανθρώπινων δραστηριοτήτων για το χειρισμό επιφανειών και προστέθηκε στις επιφάνειες ως χαρακτηριστικό τους μαζί και πέρα από τα άλλα φυσικά χαρακτηριστικά τους.

Αφού, επομένως, οι μαθηματικές έννοιες δεν αναφέρονται άμεσα σε αισθητά χαρακτηριστικά ή ιδιότητες των στοιχείων της πραγματικότητας, δεν μπορεί κατά συνέπεια να είναι και εμπειρικά επαληθεύσιμες. Αναφέρονται σε άλλες έννοιες, μη αναγκαστικά μαθηματικές, επί των οποίων και ορίζονται και οι οποίες ενδεχομένως αντανακλούν χαρακτηριστικά ή ιδιότητες που αποδίδονται στα στοιχεία της πραγματικότητας, τα οποία με τη σειρά τους είναι εμπειρικά επαληθεύσιμα.

Για παράδειγμα, η μαθηματική έννοια «αριθμός» αποδίδεται σε ένα χαρακτηριστικό που αποκαλείται «πλήθος», το οποίο και εισάγεται σε μια ολότητα διακριτών αντικειμένων. Το χαρακτηριστικό «πλήθος» εκφράζει μια συγκεκριμένη σχέση της ολότητας αυτής με κάθε άλλη ολότητα που έχει το ίδιο πλήθος αντικειμένων. Εκφράζει, δηλαδή, μια σχέση πληθικότητας μεταξύ ομάδων διακριτών αντικειμένων. Η μη μαθηματική έννοια «πλήθος» μιας σειράς διακριτών αντικειμένων δεν αναφέρεται, όμως, σε ένα αισθητό χαρακτηριστικό των ίδιων των αντικειμένων, όπως είναι τα φυσικά χαρακτηριστικά τους. Είναι ένα χαρακτηριστικό το οποίο επίσης δημιουργείται νοητικά μόνο όταν τα αντικείμενα συσχετίζονται μεταξύ τους και θεωρούνται ως μια ολότητα και το οποίο παύει να υπάρχει όταν παύσει ο συσχετισμός και η συγκεκριμένη θεώρησή τους. Καθένα, δηλαδή, από μια σειρά αντικειμένων έχει ύλη, μορφή, χρώμα και διάφορα άλλα αισθητά χαρακτηριστικά. Όταν τα αντικείμενα αυτά τοποθετούνται μαζί και θεωρούνται από συγκεκριμένη οπτική ως μια ολότητα, δημιουργείται η έννοια του «πλήθους», η οποία παύει να υπάρχει όταν τα αντικείμενα αυτά διασκορπιστούν και παύσουν να θεωρούνται ως τέτοια. Ο οποιοσδήποτε «αριθμός» εισάγεται στη συνέχεια ως χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου πλήθους της συγκεκριμένης ολότητας και

εκφράζει τη σχέση της με κάθε άλλη ολότητα που έχει το ίδιο πλήθος αντικειμένων. Αντίστοιχα η έννοια «*άθροισμα*» δύο αριθμών είναι γενίκευση του αποτελέσματος μιας νοητικής ενέργειας επί αριθμών, που ο καθένας εκφράζει το πλήθος μιας ολότητας και χαρακτηρίζει μια νέα ολότητα κ.ο.κ.

Πρέπει να σημειωθεί ότι η απόδοση ιδιοτήτων σε αντικείμενα, όντα ή καταστάσεις της πραγματικότητας που δεν αντιστοιχούν σε φυσικά ή λειτουργικά χαρακτηριστικά τους, αν και αποτελεί θεμελιώδες γνώρισμα των μαθηματικών εννοιών, δεν είναι αποκλειστικό στοιχείο της μαθηματικής δραστηριότητας. Είναι γενικότερα ένα αποτέλεσμα των ανθρώπινων κοινωνικών δραστηριοτήτων, το αποτέλεσμα της κοινωνικής διαμεσολάβησης ανάμεσα στον άνθρωπο και την πραγματικότητα. Ιδιότητες, όπως για παράδειγμα ακριβό, ωραίο, φαγώσιμο, δεν ενυπάρχουν σε αντικείμενα, όντα ή καταστάσεις της πραγματικότητας, αλλά είναι κοινωνικές κατασκευές που αποδίδονται σε κατηγορίες αντικειμένων, όντων ή καταστάσεων της πραγματικότητας, ως αποτέλεσμα συγκεκριμένων ανθρώπινων κοινωνικών δραστηριοτήτων. Με αυτή την έννοια οι μαθηματικές έννοιες είναι επίσης κοινωνικές κατασκευές.

Το βασικό αυτό χαρακτηριστικό των μαθηματικών εννοιών έχει ως συνέπεια να μην είναι δυνατή η εμπειρική επαλήθευση ή διάψευση των μαθηματικών προτάσεων, των σχέσεων δηλαδή που διατυπώνονται ανάμεσα σε μαθηματικές έννοιες και εκφράζουν ως βεβαιότητες ή ως υποθέσεις νοητικά γεγονότα. Οι προτάσεις αυτές αποκαλούνται στα μαθηματικά «*θεωρήματα*», δηλαδή θεωρήσεις μιας πραγματικότητας από μια συγκεκριμένη οπτική, και όχι για παράδειγμα «*νόμοι*», όπως αποκαλούνται οι προτάσεις των φυσικών επιστημών που αναφέρονται άμεσα σε στοιχεία της υλικής πραγματικότητας. Αντίστοιχα, η επαλήθευση ή η διάψευση των μαθηματικών θεωρημάτων βασίζεται σε διαδικασίες «*απόδειξης*» τους, δηλαδή σε τεκμηριώσεις της αλήθειας τους ή μη, στη βάση της λογικής αναγκαιότητας, και όχι σε διαδικασίες εμπειρικής επαλήθευσης ή διάψευσης, όπως είναι για παράδειγμα τα «*πειράματα*» των φυσικών επιστημών. Η διασφάλιση όμως της δυνατότητας να αποδεικνύεται η αλήθεια ή μη κάθε μαθηματικής πρότασης που μπορεί να διατυπωθεί, καθιστά αναγκαία μια οργάνωση των μαθηματικών εννοιών, η οποία και αναλύεται στο επόμενο κεφάλαιο.

Από την άποψη τώρα της μαθηματικής εκπαίδευσης, ο ιδιόμορφος αυτός χαρακτήρας των μαθηματικών εννοιών καθιστά τη νοητική συγκρότησή τους από τα παιδιά, τα οποία εξαιτίας της ηλικίας τους λειτουργούν νοητικά με βάση τα συγκεκριμένα στο χώρο και το χρόνο στοιχεία της πραγματικότητας,

ένα όχι εύκολο εγχείρημα. Παράλληλα, όμως, θέτουν και μια σειρά ερωτημάτων για την αποτελεσματικότητα της χρήσης «εποπτικών» μέσων ή της εφαρμογής «ανακαλυπτικών» μεθόδων διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών, εννοιών δηλαδή οι οποίες δεν αναφέρονται σε χαρακτηριστικά ή ιδιότητες που ενυπάρχουν στα στοιχεία της αισθητής πραγματικότητας και επομένως δεν είναι δυνατόν ούτε να γίνουν άμεσα αισθητές ούτε να ανακαλυφθούν μέσα από ανθρώπινες, εκπαιδευτικές ή μη δραστηριότητες.

### 1.3 Η ΟΡΓΑΝΩΣΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΟΥΣ οι μαθηματικές έννοιες αρθρώνονται προοδευτικά σε οργανωμένα συστήματα αλληλοσυσχετιζόμενων εννοιών, καθένα από τα οποία συγκροτεί και μια μαθηματική θεωρία, όπως είναι για παράδειγμα η θεωρία των αριθμών, η θεωρία των συνόλων, η θεωρία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κ.ο.κ. Σε κάθε τέτοιο σύστημα, καθεμιά μαθηματική έννοια ορίζεται από τις σχέσεις της με τις άλλες μαθηματικές έννοιες και αποκτά ένα συγκεκριμένο νόημα στο πλαίσιο των σχέσεων αυτών. Κάθε μαθηματική έννοια επομένως έχει ένα διπλό χαρακτήρα. Είναι προϊόν αφαίρεσης μιας σειράς σχέσεων και ταυτόχρονα αποτελεί αντικείμενο μιας νέας αφαίρεσης από την οποία προκύπτει μια άλλη έννοια. Επομένως, κάθε διαφορετική οργάνωση των μαθηματικών εννοιών που έχει ως συνέπεια και την τροποποίηση των μεταξύ τους σχέσεων, τροποποιεί αντίστοιχα το νόημα ή και το περιεχόμενο καθεμιάς έννοιας.

Μέσα από μια μακρόχρονη διαδικασία εξέλιξης της επιστημονικής πρακτικής των μαθηματικών προέκυψε και καθιερώθηκε ένα πρότυπο οργάνωσης των μαθηματικών εννοιών και των μεταξύ τους σχέσεων, που ονομάστηκε «αξιωματικό σύστημα» οργάνωσης, το οποίο με τη σειρά του καθορίζει αντίστοιχες με αυτό μαθηματικές θεωρίες.

Στο πλαίσιο μιας τέτοιας οργάνωσης οι μαθηματικές έννοιες που δεν προέρχονται από άλλες έννοιες με λογικές διαδικασίες και που το περιεχόμενό τους δεν είναι αναγκαστικά καθορισμένο ονομάζονται συνήθως «*θεμελιώδεις ή πρωταρχικές έννοιες*», ενώ οι καθορισμένες μεταξύ τους σχέσεις και οι βασικές ιδιότητες των σχέσεων αυτών ονομάζονται «*αξιώματα*».

Με βάση τις πρωταρχικές έννοιες, τα αξιώματα και καθορισμένους κανόνες συλλογισμού ορίζονται διαδοχικά άλλες έννοιες και αντίστοιχα, με καθορισμένες λογικές διαδικασίες, παράγονται σχέσεις και ιδιότητες τόσο των



πρωταρχικών όσο και των παράγωγων εννοιών, που διατυπώνονται σε προτάσεις οι οποίες με μαθηματικούς όρους αποκαλούνται «θεωρήματα».

Σε ένα τέτοιο αξιωματικό σύστημα οργάνωσης των μαθηματικών εννοιών και συμπερασμάτων, οι πρωταρχικές έννοιες θεμελιώνουν την ύπαρξή τους και οι βασικές σχέσεις και ιδιότητες των εννοιών (αξιώματα) τεκμηριώνουν την αλήθεια τους είτε με επίκληση της κοινής εμπειρίας (όπως για παράδειγμα η αλήθεια της πρότασης «το όλο είναι μεγαλύτερο από το μέρος» θεωρείται δεδομένη από την κοινή εμπειρία), είτε με αναφορά σε απόλυτα καθορισμένες και τυπικά διατυπωμένες παραδοχές (όπως για παράδειγμα η αλήθεια της πρότασης «δεν υπάρχει φυσικός αριθμός του οποίου επόμενος να είναι το μηδέν» υποτίθεται δεδομένη στη βάση μιας σειράς προκαταβολικά διατυπωμένων παραδοχών).

Πρέπει επίσης να σημειωθεί ότι προτάσεις που εκφράζουν σχέσεις μεταξύ εννοιών ή προτάσεις που εκφράζουν ιδιότητες των σχέσεων αυτών δεν έχουν γενικά και εκ των προτέρων την ιδιότητα του αξιώματος, αλλά ορίζονται ως αξιώματα στο πλαίσιο ενός ορισμένου αξιωματικού συστήματος οργάνωσης μιας μαθηματικής θεωρίας. Μια πρόταση που αποτελεί αξίωμα στο πλαίσιο μιας αξιωματικά οργανωμένης μαθηματικής θεωρίας μπορεί στο πλαίσιο της ίδιας ή μιας άλλης θεωρίας να αποτελεί μια συμπερασματική πρόταση (θεώρημα). Κατά συνέπεια, οι συμπερασματικές προτάσεις, που παράγονται στο πλαίσιο μιας μαθηματικής θεωρίας, αποκτούν νόημα και τεκμηριώνουν το περιεχόμενό τους ως αληθές, στο πλαίσιο του συγκεκριμένου αξιωματικού συστήματος οργάνωσης των μαθηματικών εννοιών ή ενός άλλου που είναι ταυτόσημο στο πλαίσιο της αντίστοιχης μαθηματικής θεωρίας.

Για παράδειγμα, με αφετηρία τις έννοιες «σημείο» και «ευθεία γραμμή» και με βάση μια σειρά αξιωμάτων που καθορίζουν βασικές σχέσεις και ιδιότητες των εννοιών αυτών, μπορεί να ορισθεί διαδοχικά ένα σύνολο εννοιών και να παραχθεί μια σειρά αληθών προτάσεων (θεωρημάτων) που θα συγκροτούν μια μαθηματική θεωρία ή, όπως λέγεται συνήθως, μια γεωμετρία. Μια μαθηματική έννοια, π.χ. «παράλληλες ευθείες», θα ορίζεται από τις σχέσεις της με άλλες μαθηματικές έννοιες της θεωρίας αυτής, όπως π.χ. κάθετες μεταξύ τους ευθείες. Η έννοια αυτή αποκτά ένα συγκεκριμένο νόημα και μια σειρά συγκεκριμένων ιδιοτήτων στο πλαίσιο των σχέσεων αυτών και κατά συνέπεια στο πλαίσιο της συγκεκριμένης γεωμετρίας. Το νόημα και οι ιδιότητες της έννοιας αυτής μπορεί να είναι διαφορετικά από το νόημα και τις ιδιότητες που η ίδια έννοια έχει στο πλαίσιο μιας άλλης, διαφορετικά ορ-

γανωμένης γεωμετρίας. Μια μαθηματική πρόταση που αποδίδει μια ιδιότητα στην έννοια αυτή, για παράδειγμα η πρόταση «από ένα σημείο που βρίσκεται έξω από μία ευθεία μία μόνο παράλληλη προς την ευθεία αυτή υπάρχει», μπορεί να αποτελεί αξίωμα ή συμπερασματική πρόταση (θεώρημα) της συγκεκριμένης γεωμετρίας, ανάλογα με τη συγκεκριμένη οργάνωση των εννοιών της. Παράλληλα, η ίδια πρόταση μπορεί να αποτελεί αξίωμα της συγκεκριμένης γεωμετρίας αλλά συμπερασματική πρόταση (θεώρημα) μιας άλλης διαφορετικά οργανωμένης γεωμετρίας ή, αντίστροφα, θεώρημα της συγκεκριμένης γεωμετρίας αλλά αξίωμα μιας άλλης γεωμετρίας. Στην ίδια βάση, μια συμπερασματική πρόταση της γεωμετρίας αυτής, όπως για παράδειγμα «το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι ίσο με δύο ορθές γωνίες», μπορεί να είναι αληθής στο πλαίσιο της συγκεκριμένης γεωμετρίας, που συγκροτείται από τις συγκεκριμένες έννοιες και τις συγκεκριμένες σχέσεις μεταξύ των εννοιών αυτών, αλλά ψευδής στο πλαίσιο μιας άλλης διαφορετικά οργανωμένης γεωμετρίας που συγκροτείται από τις ίδιες έννοιες αλλά διαφορετικές σχέσεις μεταξύ των εννοιών αυτών.

Όπως, μεταφορικά, με την επιλογή ενός συνόλου αρχικά διαθέσιμων βασικών χρωμάτων και μιας σειράς καθορισμένων κανόνων για την ανάμιξή τους, είναι δυνατόν να παραχθεί ένα σύνολο ορατών στους ανθρώπους άλλων χρωμάτων και αποχρώσεων. Στην περίπτωση των χρωμάτων, η δυνατότητα ή όχι παραγωγής συγκεκριμένων χρωμάτων ή αποχρώσεων εξαρτάται απολύτως και καθορίζεται από το σύνολο των αρχικά διαθέσιμων χρωμάτων και από τους επιτρεπτούς κανόνες ανάμιξής τους.

Αντίστοιχα, στην περίπτωση μιας μαθηματικής θεωρίας της γεωμετρίας η δυνατότητα ή όχι παραγωγής αληθών προτάσεων εξαρτάται απολύτως και καθορίζεται από τις αρχικές έννοιες και τα αξιώματα που προσδιορίζουν τις σχέσεις και τις ιδιότητες των εννοιών αυτών.

Ένα αξιωματικό σύστημα οργάνωσης των μαθηματικών εννοιών, για να διασφαλίζει την αλήθεια των προτάσεων που παράγονται στο πλαίσιο του με καθορισμένες λογικές διαδικασίες, θα πρέπει να χαρακτηρίζεται από συνέπεια, πληρότητα και ανεξαρτησία των αξιωμάτων του. Συνέπεια σημαίνει ότι δεν προκύπτουν στο πλαίσιο του συστήματος αντιφατικές μεταξύ τους συμπερασματικές προτάσεις. Πληρότητα σημαίνει ότι δεν υπάρχουν μαθηματικές προτάσεις –εκτός των αξιωμάτων– που να μην προκύπτουν ως αληθείς ή ψευδείς από τα αξιώματα του συστήματος. Μ' άλλα λόγια, ότι δεν υπάρχουν προτάσεις των οποίων η αλήθεια ή μη δεν μπορεί να τεκμηριωθεί απο-

δεικτικά στο πλαίσιο του αξιωματικού συστήματος οργάνωσης των μαθηματικών εννοιών<sup>1</sup>. Ανεξαρτησία, τέλος, των αξιωμάτων ενός συστήματος οργάνωσης των μαθηματικών εννοιών σημαίνει ότι κανένα από τα αξιώματα του συστήματος δεν είναι παράγωγο των άλλων αξιωμάτων.

Οι ιδιομορφίες που χαρακτηρίζουν το περιεχόμενο των μαθηματικών εννοιών, τα προβλήματα που εμπεριέχει ο συσχετισμός αυτών με καταστάσεις της πραγματικότητας, οι νοητικές δυσκολίες των παιδιών για την κατανόηση και το χειρισμό τους, η έννοια και η διαφοροποίηση του νοήματος των αριθμητικών πράξεων από την εφαρμογή τους σε διαφορετικές καταστάσεις της πραγματικότητας για την επίλυση προβλημάτων και οι κύριες νοητικές δυσκολίες των παιδιών για την κατανόηση και το χειρισμό αυτών των πράξεων κατά την επίλυση αριθμητικών προβλημάτων είναι μερικά από τα θέματα που αναλύονται σ' αυτό το βιβλίο.

Η προσέγγιση των θεμάτων αυτών γίνεται με βάση μια οπτική που θεωρεί τη μαθηματική γνώση μια δυναμική διαδικασία διερεύνησης, τη μάθηση των μαθηματικών μια γενεσιουργό διαδικασία κατασκευής νοημάτων που διαμορφώνεται καθοριστικά από την κοινωνική αλληλεπίδραση και τη διδασκαλία των μαθηματικών, μια κοινωνικά οργανωμένη δραστηριότητα μάθησης που οφείλει να δημιουργεί περιβάλλοντα μάθησης, τα οποία υποκινούν αμφιβολίες και παρέχουν εμπειρίες μάθησης στα παιδιά της σχολικής ηλικίας.

Ο **Δημήτρης Χασάπης** είναι επίκουρος καθηγητής της Μαθηματικής Εκπαίδευσης στο Πανεπιστήμιο Αθηνών.

ISBN 978-960-375-127-4



9 789603 751274

ΒΟΗΘ. ΚΩΔ. ΜΗΧ/ΣΗΣ 3127